Лекция 9 Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл

Тлеулесова А.М.

1) *Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.*

2) *Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях.*

3) *Основные свойства неопределенных интегралов.*

4) *Таблица простейших неопределенных интегралов.*

5) *Основные методы интегрирования. Интегрирование методом замены переменной.*

Метод интегрирования по частям

Первообразная функция

ОПР. Функция $y = F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ на данном промежутке **(a;b)**, если для любого **x** из этого промежутка

$F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx.$

Пример. Первообразной для функции

$$f(x) = x^2$$

на всей числовой оси является $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$C = const$ так как $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2.$

Теорема Если функция ***f(x)*** непрерывна на данном интервале, то на этом интервале она имеет первообразную.

Теорема Если функция ***F(x)*** является первообразной функции ***f(x)*** на **(*a;b*)**, то множество всех первообразных для ***f(x)*** задается формулой ***F(x)*+C**, где **C** – постоянная.

Неопределенный интеграл

ОПР. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для данной функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Знак $\int$ называется **интегралом**, функция

$f(x)$ – **подынтегральной функцией**,

$f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**,

x – **переменной интегрирования**.

Операция нахождения неопределенного интеграла для данной функции называется **интегрированием** этой функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

Таким образом, $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

правильность интегрирования проверяется дифференцированием!

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

где $\int f(u)du = F(u) + C,$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

$$u = \varphi(x)$$

Данное свойство называется **инвариантностью** неопределенного интеграла.

При вычислении неопределенного интеграла используют формулу:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \;\; a \neq 0.$$

Таблица простейших интегралов

Интегралы от *степенных функций*:
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in R,\ n \neq -1;\ x \in R);$ 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \quad (n = -1,\ x \neq 0).$
Интегралы от *показательных* и, в частности, экспоненциальной $(a = e)$ функций:
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (\mathrm{a} > 0,\ \mathrm{a} \neq 1,\ \mathrm{x} \in \mathrm{R});$ $\int e^x dx = e^x + C$
Интегралы от *тригонометрических функций*:
4. $\int \cos x dx = \sin x + C \quad (x \in R);$ 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (x \in R);$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z)$ 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad (x \neq \pi n, \quad n \in Z)$
Интегралы от *рациональных функций*:

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$ ($x \in R$; этот интеграл подразумевает двоякую форму записи; в зависимости от ситуации можно использовать как первое, так и второе его представление);

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$ $(x \in R);$ здесь и ниже параметр a считаем положительным;

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (x \neq \pm a).$

Интегралы от *иррациональных функций*:

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (|x| < 1);$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (|x| < a);$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0);$

14. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (|x| \le a);$

15. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$

Интегралы от *гиперболических функций*:

16. $\int chx dx = shx + C \quad (x \in R);$ 17. $\int shx dx = chx + C \quad (x \in R);$

18. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C \quad (x \in R);$ 19. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = cthx + C \quad (x \neq 0).$

Пример 1. Используя таблицу и свойства интегралов, найти интегралы.

$$\int (2x+7^x)\,dx = 2\int x\,dx + \int 7^x\,dx =$$

$$2\frac{x^2}{2}+\frac{7^x}{\ln 7}+C = x^2+\frac{7^x}{\ln 7}+C.$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Основные методы вычисления неопределенных интегралов

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредствен-ным интегрированием.**

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала (операция **«подведения под знак дифференциала»**).

Например: $$f'(u)du = d(f(u))$$

$$du = d(u+b), \qquad b = const;$$

$$du = \frac{1}{a}d(au+b), \quad a \neq 0, \quad a = const;$$

$$\cos u\,du = d(\sin u).$$

Примеры

1. $$\int (3x+1)^9 dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^9 d(3x+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{10}}{10} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{4x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x+5)}{4x+5} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|4x+5| + C.$$

Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл $\int f(u)du$, который вычисляется проще, чем исходный.

Пример

$$1.\quad \int (6x-3)^5 dx = \left| \begin{matrix} t = 6x-3 \\ dt = 6dx, dx = \dfrac{dt}{6} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int t^5 dt = \frac{1}{6}\frac{t^6}{6} + C = (t = 6x-3) =$$

$$= \frac{1}{36}(6x-3)^6 + C.$$

$$2.\quad \int \frac{dx}{5-7x} = \left| \begin{array}{c} t = 5-7x \\ dt = -7dx, dx = -\frac{1}{7}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln|t| + C = (t = 5-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|5-7x| + C.$$

Интегрирование по частям

Формула $\int u\,dv = uv - \int v\,du,$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, называется

формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если $\int u\,dv.$

более прост в вычислении, чем $\int v\,du$

Некоторые типы интегралов, которые можно вычислять методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{mx}dx, \int P_n(x)a^{mx}dx,$

$$\int P_n(x)\sin mxdx, \int P_n(x)\cos mxdx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен, m – число.

Здесь полагают $u = P_n(x),$

за dv обозначают остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln x dx,$

$$\int P_n(x)\arccos x dx, \quad \int P_n(x)\mathrm{arctg} x dx,$$

$$\int P_n(x)\arcsin x dx, \quad \int P_n(x)\mathrm{arcctg} x dx.$$

Здесь полагают $P_n(x)dx = dv$

за u обозначают остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx dx, \int e^{ax}\sin bx dx,$

где a и b – числа.

За u можно принять функцию e^{ax}.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x;\ dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx;\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{matrix} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Рациональные функции

Целая рациональная функция:
многочлен вида

$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

Дробная рациональная функция:
отношение целых рациональных функций

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^{\boxed{m}} + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^{\boxed{n}} + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

Правильная дробная рациональная функция:
степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе

$$m < n$$

Неправильная дробная рациональная функция:
степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе

$$m \geq n$$

Определите вид функции:

$\dfrac{0{,}2x^3 + \sqrt{3}x}{\sqrt{5}}$ - целая рациональная

$\dfrac{2x^2 - 3}{4 - x^2}$ - дробная рациональная неправильная

$\dfrac{2x^2 - 3}{4 - x^3}$ - дробная рациональная правильная

$\dfrac{2\sqrt{x}}{x - 1}$ - иррациональная

Интегрирование правильных рациональных функций

При интегрировании правильной рациональной функции её нужно разложить в сумму **простейших рациональных функций**.

Простейшими называются рациональные функции вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$ **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, \ldots$ **III.** $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ **IV.** $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, $D<0$, $k = 2, 3, \ldots$

Определите вид функции:

$\dfrac{5}{x+2}$ - простейшая первого вида

$\dfrac{\sqrt{3}}{(x-\sqrt{5})^2}$ - простейшая второго вида

$\dfrac{2x-3}{3x^2-2x+1}$ - простейшая третьего вида

$\dfrac{5(x+4)}{(x^2+3)^3}$ - простейшая четвёртого вида

$\dfrac{5}{x^2-1}$ - не простейшая, так как знаменатель разлагается на действительные множители первой степени

$\dfrac{3x-2}{(x^2-\sqrt{3})^3}$ - не простейшая, так как знаменатель разлагается на действительные множители первой степени

$\dfrac{3}{2x-9} = \dfrac{\frac{3}{2}}{x-\frac{9}{2}}$ - простейшая первого вида

Схема разложения правильных рациональных функций на простейшие рациональные функции

N/N	Исходная дробь	Вид ее разложения на слагаемые
1	$\frac{3x+4}{x(x+5)(x-7)}$	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x-7}$
2	$\frac{1}{(x-3)(x+2)^2}$	$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}$
3	$\frac{x^2+3x}{(x^2-3x+5)(x^2+4)}$	$\frac{Ax+B}{x^2-3x+5}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$
4	$\frac{2x+3}{x^2(x+2)(x^2+3)}$	$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}+\frac{Dx+E}{x^2+3}$
5	$\frac{x^2+4}{(x-1)(x^2+x+2)^2}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+2}$